Билет № 1

1. Первый признак равенства треугольников.
2. Параллелограмм. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Координаты и векторы».

Билет № 2

1. Второй признак равенства треугольников.
2. Прямоугольник. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур».

Билет № 3

1. Третий признак равенства треугольников.
2. Ромб. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования».

Билет № 4

1. Признаки параллельности двух прямых.
2. Окружность. Определение, взаимное расположение прямой и окружности.
3. Задача по теме «Четырехугольники».

Билет № 5

1. Теорема о сумме внутренних углов треугольника.
2. Касательная к окружности. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур».

Билет № 6

1. Теорема о сумме углов выпуклого n-угольника.
2. Формула длины окружности. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Треугольники».

Билет № 7

1. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника.
2. Формула для радиуса окружности, описанной около правильного n-угольника. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Четырехугольники».

Билет № 8

1. Теорема о соотношении между сторонами треугольника (неравенство треугольника).
2. Формула для радиуса окружности, вписанной в правильный n-угольник. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Площади плоских фигур».

Билет № 9

1. Теорема о средней линии треугольника.
2. Формула площади круга. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования».

Билет № 10

1. Теорема о средней линии трапеции.
2. Формулы площади треугольника. Запись, вывод одной из них.
3. Задача по теме «Окружность и круг».

Билет № 11

1. Теорема об окружности, описанной около треугольника.
2. Тригонометрические тождества. Примеры, доказательства.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность».

Билет № 12

1. Теорема об окружности, вписанной в треугольник.
2. Формула площади трапеции. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Геометрические преобразования».

Билет № 13

1. Теорема об угле, вписанном в окружность.
2. Формула площади параллелограмма. Запись, вывод.
3. Задача по теме «Треугольники».

Билет № 14

1. Признаки параллелограмма.
2. Параллельный перенос. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Окружность и круг».

Билет № 15

1. Теорема Фалеса.
2. Осевая симметрия. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

Билет № 16

1. Теорема Пифагора.
2. Центральная симметрия. Определение, примеры.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

Билет № 17

1. Теорема синусов.
2. Серединный перпендикуляр. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Окружность и круг».

Билет № 18

1. Теорема косинусов.
2. Биссектриса угла. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Координаты и векторы».

Билет № 19

1. Первый признак подобия треугольников.
2. Построение середины данного отрезка.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность».

Билет № 20

1. Второй признак подобия треугольников.
2. Построение биссектрисы данного угла.
3. Задача по теме «Вписанные и описанные многоугольники».

Билет № 21

1. Третий признак подобия треугольников.
2. Построение угла, равного данному.
3. Задача по теме «Координаты и векторы».

Билет № 22

1. Вывод уравнения прямой.
2. Перпендикулярные прямые. Определение, построение прямой, перпендикулярной данной.
3. Задача по теме «Четырехугольники».

Билет № 23

1. Вывод уравнения окружности.
2. Равнобедренный треугольник. Определение, свойства.
3. Задача по теме «Параллельность и перпендикулярность».

Билет № 24

1. Скалярное произведение двух векторов. Определение, свойства.
2. Вертикальные углы. Определение, свойство.
3. Задача по теме «Треугольники».

Задачи к билетам 6, 13, 24

Тема «Треугольники»

1. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A пересекает его стороны в точках B и C. Докажите, что треугольник ABC является равнобедренным.

2. В прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ из вершин прямых углов C и C_1 проведены высоты CH и C_1H_1; $CH=C_1H_1$ $AH=A_1H_1$. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, равны.

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB отложен отрезок $AA_1 = \frac{1}{3} AB$, на BC отложен отрезок $BB_1 = \frac{1}{3} BC$ и на CA - отрезок $CC_1, = \frac{1}{3} CA$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

4. В треугольнике ABC равны углы A и C. На стороне AC взяты точки D и E такие, что $AD == CE$. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

5. Определите вид треугольника, вершинами которого являются середины сторон равнобедренного треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике ABC из концов основания AC проведены высоты, которые пересекаются в точке H. Докажите, что $BH \perp AC$.

7. В прямоугольном треугольнике ABC угол Bравен 30°. Вершина прямого угла C соединена отрезком с точкой M, принадлежащей гипотенузе. Угол AMC равен 60°. Докажите, что CM является медианой треугольника.

8. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются под углом 128^e. Найдите угол C.

9. Постройте треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и прилежащему к ней углу.

10. Постройте треугольник по двум его сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

11. Постройте треугольник по его стороне, высоте и медиане, проведенным из одной из прилежащих к ней вершин треугольника.

12. Постройте треугольник по стороне, опущенной на нее высоте и проведенной к ней медиане.

13. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

14. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника равна 12 см. Найдите расстояние от ее середины до точки пересечения медиан треугольника?

15. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Найдите периметр квадрата, если гипотенуза равна 8 см.

16. Перпендикуляр, опущенный из середины одного катета прямоугольного треугольника на гипотенузу, равен 6 см, а середина гипотенузы отстоит от этого же катета на 7,5 см. Найдите стороны данного треугольника.

17. Из середины M гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен к ней перпендикуляр, который пересекает один из катетов данного треугольника в точке D, а продолжение другого — в точке E, $MD = a$, $ME= =b$. Найдите стороны данного треугольника.

18. В треугольнике даны сторона и прилежащие к ней углы β и γ. Найдите остальные элементы треугольника.

19. В треугольнике даны две стороны a и b. Найдите третью сторону треугольника, если медианы, проведенные к известным сторонам, пересекаются под прямым углом.

20. В треугольнике ABC известны все стороны: AB = 13 см, BC = 14 см, AC = 15 см. К стороне AB через вершину B проведен перпендикуляр, который пересекает продолжение биссектрисы CD в точке E. Найдите BE.

Задачи к билетам 11, 19, 24

Тема «Параллельность и перпендикулярность»

21. Найдите все углы четырехугольника ***ABCD**,* если $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 138°$, $\angle CDA = 52°$.

22. Докажите, что биссектрисы двух: а) соответственных или накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, параллельны; б) внешних или внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, перпендикулярны.

23. В треугольнике ***ABC*** ΘA =42°, ΘB= 48°. Треугольник пересечен прямой, параллельной стороне ***AC***. Определите углы образовавшегося треугольника.

24. Отрезки ***AC*** и ***BD*** в точке пересечения делятся пополам. Соедините последовательно точки ***A, B, C, D*** и докажите, что параллельны и равны отрезки: а) ***AB*** и ***CD****;* б) ***BC*** и ***AD***.

25. Из точки ***C***, взятой внутри угла ***AOB**,* равного 53°, проведены прямые, параллельные сторонам данного угла. Найдите наибольший угол при точке ***C***.

26. Прямая, пересекающая две параллельные прямые, образует с одной из них угол в 150°. Найдите отрезок секущей, заключенный между этими прямыми, если расстояние между двумя параллельными прямыми равно 27 см.

27. Докажите, что середина отрезка прямой, заключенного между двумя параллельными прямыми, является серединой отрезков прямых, проходящих через эту точку и заключенных между теми же параллельными прямыми.

28. В треугольнике ***ABC*** проведена биссектриса угла ***B**,* пересекающая сторону ***AC*** в точке ***D***. Через точку ***D*** проведена прямая, параллельная стороне ***BC*** и пересекающая сторону ***AB*** в точке ***E***. Докажите, что ***DE*** = ***BE***.

29. В окружности проведены хорды $AB \parallel CD$ и $AE \parallel FD$. Докажите, что хорды ***FB*** и ***CE*** параллельны.

30. В треугольнике ***ABC*** на стороне ***BC*** взята точка ***D*** таким образом, что Θ***DAC***=Θ ***ABC***. Докажите, что Θ***ADC***= Θ***BAC.***

31. Угол ***ABC*** равен 45°. На его стороне ***BC*** взята произвольная точка ***D*** и проведен $DE \perp BA$ ***(E*** принадлежит ***AB)****.* Аналогично проведены $EF \perp BC$ и $FG \perp BA$ ***(F, G*** принадлежат соответственно ***CB*** и ***AB);*** ***DE*** = 10 см. Найдите отрезок ***FG***.

32. В треугольнике биссектрисы двух углов пересеклись под углом 140°. Определите вид данного треугольника.

33. В прямоугольном треугольнике ***ABC*** (Θ***C*** — прямой) ***AD*** и ***BE*** — продолжения гипотенузы. Биссектрисы углов ***CAD*** и ***CBE*** продолжены до пересечения в точке ***M***. Найдите угол ***AMB***.

34. Два угла с соответственно перпендикулярными сторонами относятся как 17:19. Найдите эти углы.

35. Стороны тупого и острого углов перпендикулярны. Найдите эти углы, если их разность равна 32°20'.

36. На отрезке ***AB*** взята произвольная точка **C.** Через ***A*** и ***B*** проведены по одну сторону от данного отрезка параллельные лучи. На них соответственно взяты точки ***D*** и ***E*** таким образом, что ***AD*** = ***AC*** и ***BE*** = ***BC***. Найдите угол ***DCE***.

37. В треугольнике ***ABC*** биссектрисы внутренних углов ***B*** и ***C*** пересекаются в точке ***O***. Через эту точку проведена прямая ***OD*** параллельно ***AC*** до пересечения с ***BC*** в точке ***D*** и прямая ***OE*** параллельно ***AB*** до пересечения с ***BC*** в точке ***E***. Докажите, что периметр треугольника ***OED*** равен длине стороны ***BC***.

38. На прямой *a* взята точка ***A***. Через нее проведена прямая ***AB;*** ***AC*** и ***AD*** — биссектрисы соответственно углов ***BAM*** и ***BAN***. На ***AC*** и ***AD*** взяты соответственно точки ***K*** и ***L***. Докажите, что если $KL \parallel MN$, то ***AB*** делит отрезок ***KL*** пополам.

39. ***MN*** и ***PQ*** — параллельные прямые. Из точки ***A**,* принадлежащей прямой ***MN**,* проведены к прямой ***PQ*** наклонная ***AB*** и перпендикуляр ***AC*** (точки ***B*** и **C** принадлежат прямой ***PQ)****.* Точка ***D*** принадлежит прямой ***MN*** и прямая ***BD*** пересекает ***AC*** в точке ***E***. Докажите, что если ***ED*** = ***2AB**,* то Θ***DBC***$=\frac{1}{3}$Θ***ABC***.

40. Из точки, принадлежащей одной из сторон острого угла, проведен к ней перпендикуляр. Докажите, что он пересекает другую сторону данного угла.

Задачи к билетам 4, 7, 22

Тема «Четырехугольники»

41. Найдите углы параллелограмма, если его неравные углы относятся как 5:7.

42. Одна сторона параллелограмма равна 3,6см и составляет 0,3 его периметра. Найдите остальные стороны параллелограмма.

43. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

44. Одна сторона параллелограмма равна 5,4 см и составляет 40% его периметра. Найдите остальные стороны параллелограмма.

45. В параллелограмме ***ABCD*** биссектриса угла ***A*** пересекает продолжение ***BC*** в точке ***E***. Найдите периметр параллелограмма, если ***BE*** = 16 см, ***CE*** = 5 см.

46. Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней точки параллелограмма до всех его сторон есть величина постоянная. Чему равна эта сумма?

47. Высоты, проведенные из вершины ромба, образуют угол 30°. Найдите углы: а) ромба; б) которые образуют диагонали с его сторонами.

48. В равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен 4,3 см, вписан квадрат таким образом, что у них один общий угол. Найдите периметр квадрата.

49. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат таким образом, что одна его сторона лежит на гипотенузе, которая равна 12см. Найдите периметр квадрата.

50. В ромбе высота, проведенная из вершины тупого угла, делит его сторону пополам. Найдите: а) углы ромба; б) его периметр, если меньшая диагональ равна 3,5см.

51. В квадрате ***ABCD*** точки ***E*** и ***F*** — середины соответственно сторон ***BC*** и ***CD***. Точки ***A*** и ***E***, ***B*** и ***F*** соединены отрезками. Докажите, что $AE \perp BF$.

52. В параллелограмме ***ABCD*** точки ***E***, ***F*** — середины соответственно сторон ***BC*** и ***AD***. Определите вид четырехугольника ***BEDF***.

53. Докажите, что если каждая диагональ четырехугольника делит его периметр пополам, то он является параллелограммом.

54. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведены прямые, параллельные его катетам. Определите вид получившегося четырехугольника и найдите его диагонали, если гипотенуза прямоугольного треугольника равна 9см.

55. В треугольнике ***ABC*** Θ***C***= 90°, ***CL*** - биссектриса угла ***C***, ***L*** принадлежит гипотенузе АВ. Через точку ***L*** проведены прямые, параллельные катетам. Точки ***E*** и ***F*** — точки их пересечения соответственно со сторонами ***AC*** и ***BC***. Определите вид получившегося четырехугольника ***CELF***.

56. Восстановите ромб по концам одной его диагонали и середине одной из его сторон.

57. Постройте трапецию ***ABCD*** по разности оснований ***AD-BC***, боковым сторонам ***AB*** и ***CD*** и диагонали ***AC***.

58. Докажите, что в любой трапеции середины непараллельных сторон и диагоналей принадлежат одной прямой.

59. Докажите, что в равнобедренной трапеции прямые, соединяющие середины противолежащих сторон, перпендикулярны.

60. Сумма углов при нижнем основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.

Задачи к билетам 10, 14, 17

Тема "Окружность и круг"

61. Из точки, принадлежащей окружности, проведены две равные хорды. Докажите, что диаметр, проходящий через эту точку, делит угол между хордами пополам.

62. В окружности проведены три равные хорды, одна из которых удалена от центра на 3 см. На каком расстоянии находятся от центра две другие хорды?

63. Хорда окружности пересекает ее диаметр под углом 30° и делится им на части, равные 12см и 6см. Найдите расстояние от середины хорды до диаметра.

64. Как расположены относительно друг друга две окружности (O_1;R_1) и (O_2;R_2), если O_1O_2= 2см, R_1=4 см и R_2= 6см?

65. Две окружности (***C***; ***a***) и (***D***; ***b***) касаются внешним образом. Известно, что ***CD*** = 16 см и ***a*** = 4 см. Найдите ***b***.

66. Найдите диаметры двух концентрических окружностей, если ширина соответствующего кольца равна 12 см, а радиусы окружностей относятся как 5:2.

67. Найдите условие, при котором окружность (***A***; ***a***) целиком лежит внутри окружности (***B***; ***b***).

68. Докажите равенство отрезков касательных, проведенных из точки вне окружности к этой окружности.

69. Прямая пересекает окружность в точках ***A*** и ***B***. ***C*** — произвольная точка отрезка ***AB***. Докажите, что расстояние от этой точки до центра окружности меньше радиуса данной окружности.

70. Докажите, что если прямая пересекает две концентрические окружности, то отрезки секущей, лежащие между этими окружностями, равны между собой.

71. Окружность разделена тремя точками на части, которые относятся между собой как 2:3:5. Через точки деления проведены хорды. Определите вид получившегося треугольника.

72. Даны два равных непересекающихся круга радиуса ***R***.. Расстояние между их центрами равно ***d***. Найдите сторону и площадь четырехугольника, образованного касательными, проведенными из центра каждого круга к другому кругу.

73. Через общую точку двух внешне касающихся окружностей проведена секущая. Докажите, что радиусы, проведенные в крайние точки пересечения секущей с окружностями, параллельны.

74. Две окружности внешне касаются в точке ***A***, ***B*** и ***C*** — точки касания их внешней касательной, отрезок ***BC*** = ***a***. Найдите .радиус окружности, проходящей через точки ***A***, ***B*** и ***C***.

75. Окружности, радиусы которых равны 1 см и 3 см, внешне касаются. Найдите угол между их внешними касательными.

76. ***A***, ***B***, ***C*** — последовательные точки прямой. На отрезках ***AB*** и ***AC*** как на диаметрах построены окружности. К отрезку ***AC*** в точке ***B*** проведен перпендикулярный луч, пересекающий большую окружность в точке ***D***. Из точки ***C*** проведена касательная ***CK*** к меньшей окружности. Доказать, что ***CD*** = ***CK***.

77. В круге с центром в точке ***O*** проведен диаметр ***AB***. Через точки ***A*** и ***B*** проведены касательные. Третья касательная, проведенная через точку окружности ***M***, пересекает первые две касательные соответственно в точках ***C*** и ***D***. Докажите, что треугольник ***COD*** прямоугольный.

78. Через внешнюю точку к окружности проведены секущая, проходящая через центр окружности, и касательная, отрезок которой до точки касания равен половине секущей. Докажите, что отрезок касательной относится к радиусу окружности как 4:3.

79. ***A*** и ***B*** - точки пересечения двух окружностей; ***C*** и ***D*** — точки касания их общей внешней касательной (проведена ближе к точке ***B***). Через точки ***B***, ***C***, ***D*** проведена окружность. Докажите, что ее радиус есть среднее геометрическое между радиусами данных окружностей.

80. Две окружности, радиусы которых равны 2 см и 3 см, внутренне касаются. Из центра меньшей окружности проведен луч, перпендикулярный линии центров, который пересекает большую окружность, и из точки пересечения проведены две касательные к меньшей окружности. Найдите угол между касательными.

Задачи к билетам 15, 16, 20

Тема «Многоугольники. Вписанные и описанные многоугольники»

81. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15см. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

82. Острый угол прямоугольного треугольника равен 37°. Найдите углы, под которыми видны катеты из центра описанной около него окружности.

83. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 10см, а один из углов равен 140°.

84. Постройте треугольник $\boldsymbol{ABC}$ по стороне $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{b}$, углу $\boldsymbol{A}$ и радиусу $\boldsymbol{R}$ описанной окружности.

85. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне a и радиусу описанной окружности R.

86. Можно ли описать окружность около четырехугольника, углы которого, взятые последовательно, относятся как 2:3:4:11?

87. Найдите углы вписанного в окружность четырехугольника, если его противоположные углы относятся соответственно как 2:3 и 4:5.

88. Постройте четырехугольник, который можно вписать в окружность, по трем его сторонам и одной диагонали.

89. В прямоугольный треугольник с острым углом 40° вписана окружность. Найдите углы, под которыми видны стороны данного треугольника из центра вписанной в него окружности.

90. Углы треугольника относятся как 2:3:4. Под какими углами видны стороны этого треугольника из центра вписанной в него окружности.

91. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, большая диагональ которого равна 18см, тупой угол равен 120°.

92. Найдите длину окружности, которая описана около прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему острым углом α.

93. Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, последовательные стороны которой равны 2 см, 1 см, 1см, 1 см.

94. Три последовательные стороны описанной около круга трапеции равны 13см, 8см и 13см. Найдите радиус круга.

95. В равнобедренную трапецию, основания которой равны 18 см и 6 см, вписан круг. Найдите его радиус и углы трапеции.

96. Докажите, что во вписанном в окружность четырехугольнике внешний угол равен противолежащему внутреннему углу.

97. Через точку $\boldsymbol{A}$ - середину дуги $\boldsymbol{BC}$, проведены две хорды $\boldsymbol{AD}$ и $\boldsymbol{AE}$, пересекающие $\boldsymbol{BC}$ в точках соответственно $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{G}$. Докажите, что четырехугольник $\boldsymbol{DFGE}$ можно вписать в окружность.

98. Докажите, что во вписанном в окружность четырехугольнике биссектриса внутреннего угла пересекается с биссектрисой противолежащего внешнего угла на окружности.

99. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ биссектриса угла **С** пересекает в точке $\boldsymbol{D}$ перпендикуляр, проведенный из середины стороны $\boldsymbol{AB}$. Докажите, что около четырехугольника $\boldsymbol{ADBC}$ можно описать окружность.

100. Две окружности пересекаются в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$; $\boldsymbol{CAD}$ — секущая (точки $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ принадлежат окружностям). Через точки $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{C}$ проведены касательные до пересечения в точке $\boldsymbol{E}$. Докажите, что около четырехугольника $\boldsymbol{BCED}$ можно описать окружность.

Задачи к билетам 3, 9, 12

Тема «Геометрические преобразования»

101. Точка A симметрична точке A_1. Найдите центр их симметрии.

102. Докажите, что центр окружности является центром ее симметрии.

103. Дан луч OA. Постройте фигуру, центрально-симметричную ему относительно точки O. Что это за фигура?

104. Докажите, что две пересекающиеся прямые, проходящие через две симметричные относительно центра точки, сами не симметричны относительно того же центра симметрии.

105. Докажите, что две прямые, проходящие через центр симметрии, отсекают равные отрезки от двух прямых, симметричных относительно этого центра.

106. Осевая симметрия задана парой соответствующих точек A и A_1. Постройте ось симметрии a.

107. Постройте фигуру, симметричную данному треугольнику OPR относительно оси l, если OP пересекает l.

108. В некотором четырехугольнике средние линии (соединяют середины противоположных сторон) являются его осями симметрии. Определите вид данного, четырехугольника.

109. Докажите, что точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, соединяющей их центры.

110. Точки X и X_1 принадлежат различным сторонам угла AOB, причем $OX= OX_1$. Докажите, что точки X и X_1 симметричны относительно биссектрисы угла AOB.

111. Постройте фигуру, в которую перейдет квадрат $ABCD$ при повороте вокруг точки D по часовой стрелке на угол 45°.

112. Постройте фигуру, в которую перейдет равносторонний треугольник ABC при повороте вокруг точки A против часовой стрелки на угол 120°.

113. Через центр O квадрата проведены два взаимно перпендикулярных отрезка, концы которых принадлежат сторонам квадрата. Докажите, используя поворот, что отрезки равны.

114. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2, C_2 середины соответствующих отрезков AM, BM, CM. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

115. Через концы диаметра AB окружности с центром в точке O проведены касательные, на которых по разные стороны от диаметра отложены два равных отрезка AC и BD. Докажите, что точки C, D и O принадлежат одной прямой.

116. На каждой медиане треугольника построена точка, делящая ее в отношении 1:2, считая от вершины. Через эти точки проведены прямые, параллельные противоположным относительно данных вершин сторонам треугольника. Докажите, что эти прямые, пересекаясь, образуют треугольник, равный данному.

117. Две окружности $(O;\ R)$ и $(O_1;\ R)$ касаются внешним образом в точке M. Через нее проведены две секущие AB и CD, причем точки A, C, принадлежат одной окружности, а B, D — другой. Докажите, что $AC \parallel BD$.

118. Произвольная точка M симметрична точке M_1 относительно точки A. Точка M_1 симметрична точке M_1 относительно точки B. Докажите, что отрезок MM_2 имеет постоянную длину, т.е. не зависит от выбора точки M.

119. Точка M последовательно симметрична относительно вершин параллелограмма $ABCD$ и переходит соответственно в точки M_4, M_2, M_3, M_4 .Докажите, что точка M_4 совпадает с точкой M.

120. Даны две пересекающиеся окружности равных радиусов. Секущая, параллельная прямой, соединяющей их центры, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую в точках C и D. Определите отрезок AC, если расстояние между центрами окружностей равно d.

Задачи к билетам 2, 5, 9

Тема "Площади плоских фигур"

121. Площадь прямоугольника равна 520м^2, а отношение его сторон равно 2:5. Найдите периметр данного прямоугольника.

122. Стороны параллелограмма равны 5 см и 11 см. Найдите его площадь, если один из углов равен 30°.

123. Найдите площадь ромба со стороной 24см и углом 120°.

124. Найдите площадь параллелограмма, периметр которого равен 42 см, а высоты равны 8 см и 6 см.

125. Найдите периметр ромба, площадь которого равна 48 см^2, а острый угол равен 30°.

126. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 8 см и 18 см, а боковая сторона равна средней линии.

127. В прямоугольной трапеции большая боковая сторона равна сумме оснований, высота равна 12 см. Найдите площадь прямоугольника, стороны которого равны основаниям трапеции.

128. Стороны треугольника относятся как 3:25:26. Его площадь равна 144см^2. Найдите периметр данного треугольника.

129. Основание равнобедренного треугольника равно 5см. Медианы боковых сторон перпендикулярны. Найдите площадь данного треугольника.

130. В прямоугольном треугольнике сумма катетов равна m, а гипотенуза равна c. Найдите площадь треугольника, не вычисляя его катетов.

131. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны и равны 4 см и 11 см. Найдите его площадь.

132. Точка касания круга, вписанного в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на части, равные 4 см и 6 см. Найдите площадь этого круга.

133. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

134. Найдите отношение, в котором находятся площади треугольника и четырехугольника, на которые рассекается данный треугольник своей средней линией.

135. Найдите отношение площадей кругов вписанного и описанного около данного равностороннего треугольника.

136. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c. Найдите площадь круга, окружность которого проходит через середины сторон данного треугольника.

137. Сторона AB равностороннего треугольника ABC разделена точкой D в отношении 2:3. Из точки D опущены перпендикуляры $DE \perp BC$ и $DF \perp AC$. Найдите отношение площадей треугольника ABC и круга, описанного около четырехугольника $DECF$.

138. Прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна с, повернут около вершины прямого угла на 90°. Найдите сумму площадей, описанных при этом катетами.

139. Две окружности радиусов K и $3R$ внешне касаются. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

140. Две окружности радиусов R и $2R$ пересекаются, причем их общая хорда равна $2R$. Найдите площадь, общую для кругов, определяемых данными окружностями.

Задачи к билетам 1, 18, 21

Тема «Координаты и векторы»

141. Известно, что вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, и $\vec{c}\{m; 12\}$, $\vec{c}\{3;-5\}$, $\vec{b}\{-l; 2n\}$. Найдите числа m и n.

142. Дан вектор $\vec{a}(-8; 6)$. Найдите координаты вектора $\vec{b}(x; y)$ такого, что $\vec{b}$ одинаково направлен с $\vec{a}$ и его длина в два раза больше, чем у вектора $\vec{a}$.

143. Найдите координаты точки $A(x;y)$, если она симметрична точке $B(-20; 11)$ относительно точки $M(0;-5)$.

144. Найдите координаты точки $C(x;y)$, если она принадлежит оси абсцисс и одинаково удалена от точек $A(-14; 5)$ и $B(3; 8)$.

145. Даны точки $M(-2; 6)$, $K(1; 2)$ и $L(4; -2)$. Определите, принадлежат ли данные точки одной прямой.

146. Определите, будет ли треугольник OPQ равносторонним, если O - начало координат и $P(5;6)$, $Q(-6;5)$.

147. Найдите сумму векторов: а) $\vec{MQ} + \vec{HN} - \vec{HQ}$; б) $\vec{SR} + \vec{SQ} + \vec{RS} + \vec{QH} + \vec{HG} + \vec{GP}$.

148. Верно_ли равенство: а) $\vec{DM} + \vec{CD} + \vec{QO} + \vec{MQ} = \vec{CO}$; б) $\vec{ZM} + \vec{MN} + \vec{YZ} + \vec{NM} + \vec{XY} = \vec{XM}$?

149. В окружности с центром в точке O проведены диаметр AB и радиус OC. Пусть $\vec{OA} = a$, $\vec{OC} = c$. Необходимо выразить векторы $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$, и доказать, что угол ACB прямой.

150. Точка M делит отрезок KL в отношении 2:3. Найдите координаты вектора $\vec{MK}$, если $\vec{KL}\{-5;-9\}$.

151. Даны векторы $\vec{a}\{-4, 12\}$ и $\vec{b}\{x; -6\}$. Найдите значение x, при котором данные векторы будут перпендикулярны.

152. Дан треугольник ABC и точка G — точка пересечения его медиан. Докажите, что $3\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{AB}$.

153. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что для любой точки M имеет место равенство $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$.

154. На сторонах угла O отложены отрезки $OA = OB$. Докажите, что вектор $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$ лежит на биссектрисе угла O.

155. В треугольнике ABC точка M - середина стороны BC. Точка D симметрична точке A относительно точки M. Докажите, что: а) $\vec{BD} = \vec{AC}$, $\vec{AB} = -\vec{DC}$; б) $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$.

156. Найдите модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ единичные векторы, и угол между ними равен 60°.

157. Две равные окружности пересекаются в точках M и N. Через них проведены две параллельные секущие. Первая пересекает окружности в точках A и B, вторая — в точках C и D. Докажите, что: а) $\vec{AB} = \vec{CD}$; б) $\vec{AC} = \vec{BD}$.

158. Запишите условие того, что четырехугольник $ABCD$ является: а) параллелограммом; б) трапецией.

159. Даны четыре вектора $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{OD}$. Запишите условие того, что точка O является точкой пересечения диагоналей AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$.

160. В окружность вписан правильный пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} = \vec{0}$, где точка O - центр окружности.